www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE

Concours d'admission Session de 1990

MATHÉMATIQUES Option Générale

Durée : 4 heures - Coefficient : 4

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme associé relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

1°) Calculer $9A^3 - 9A^2 - A + I$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2°) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose : $E_{(\lambda)} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 / u(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}$.

i) Vérifier que $E_{(\lambda)}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et que si $\lambda \notin \{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \}$, alors $E_{(\lambda)}$ est réduit au vecteur nul.

ii) Déterminer $E_{(1)}$, $E_{(\frac{1}{3})}$, $E_{(-\frac{1}{3})}$ et donner une base aussi simple que possible de chacun.

iii) En déduire qu'il existe au moins une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de u relativement à cette base $\mathcal{B}'$ soit diagonale.

iv) Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ relativement à la base $\mathcal{B}'$ et en déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2 (5 points)

Une urne contient 2n jetons numérotés de 1 à 2n.

1°) Un joueur extrait un jeton au hasard de cette urne. Soit X_1 le numéro aléatoire obtenu. Quelle est la loi de X_1 ? Son espérance et sa variance ?

2°) Ce joueur a maintenant droit à deux essais, au maximum. Il décide d'utiliser la stratégie suivante :

Il se donne a priori un nombre k et

- Si le 1er tirage amène un jeton dont le numéro est au moins égal à k, il arrête le tirage.
- Si le 1er tirage amène un jeton dont le numéro est strictement inférieur à k, il replace ce jeton dans l'urne et effectue alors un second tirage.

Soit X_2 le numéro aléatoire obtenu par le joueur à son *dernier* tirage.
Quelle est la loi de X_2 ? son espérance ?
Pour quelle valeur de k l'espérance de X_2 est-elle maximale ?

3°) Ce joueur a à nouveau droit à deux essais, avec remise, et X_3 est le plus grand des deux numéros obtenus.
Quelle est la loi de X_3 ? Son espérance ? Vérifier que cette dernière règle donne une espérance supérieure à n'importe quelle stratégie relative à la question 2°).

.../...

PROBLÈME (10 points)

Pour toute valeur de l'entier strictement positif n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n : x \longmapsto x^n e^x$$

1°) Etudier les variations de f_n, en précisant les points remarquables, la nature des branches infinies et la concavité.

2°) i) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, on la note a_n dans la suite de ce problème.

ii) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone et convergente. Déterminer sa limite.

3°) On désire trouver une valeur approchée de a_1.

i) Déterminer un encadrement de a_1 d'amplitude 0,1 ; en précisant la méthode utilisée.

ii) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0{,}5 \; ; \; \forall \; n \in \mathbb{N} \; , \; u_{n+1} = e^{-u_n}.$$

Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et trouver un nombre $K \in \;]0{,}1\,[$, aussi petit que possible, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; | \, u_{n+2} - u_{n+1} \, | \leqslant K. \, | \, u_{n+1} - u_n \, |$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite est a_1.

Déterminer un encadrement de a_1 d'amplitude 10^{-2}

iii) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 0{,}57 \; ; \; \forall \; n \in \mathbb{N} \; , \; v_{n+1} = 0{,}57 \; e^{-v_n} + 0{,}43 \; v_n.$$

Trouver un nombre $K' \in \;]0{,}1\,[$, aussi petit que possible, tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; | \, v_{n+1} - a_1 \, | \leqslant K' \, | \, v_n - a_1 \, |$$

En déduire un encadrement de a_1 d'amplitude 10^{-6}

4°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx \; ; \; J_n = \int_1^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} f_n(x)\, dx$$

$$\int_1^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

i) Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = 0$; $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = +\infty$

ii) Montrer que la série de terme général $\dfrac{I_n}{n!}$ est convergente. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{I_n}{n!}$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail